

## **XIX CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA. CORDOBA-ARGENTINA**

### **MODELACIÓN NUMÉRICA DE FLUJO NO PERMANENTE CON TRANSPORTE SÓLIDO UTILIZANDO EL METODO DEL VOLUMEN FINITO (MVF). COMPARACIÓN CON LOS DATOS EXPERIMENTALES EN CANAL DE LABORATORIO**

Allen Bateman P. <sup>(1)</sup>, Andrés Manzano<sup>(1)</sup> y Andrés Andreatta I. <sup>(1-2)</sup>

<sup>(1)</sup> ETSECCPB - UPC, Barcelona-España. e.mail: allen.bateman@upc.es

<sup>(2)</sup> IMF - UCV / CEMFA - USB, Caracas, Venezuela. e.mail: aandrea@usb.ve

#### **RESUMEN**

En este trabajo se presenta una herramienta de cálculo para el cálculo del movimiento no permanente en cauces con transporte sólido única y exclusivamente teniendo en cuenta el transporte de fondo. La discretización se realiza mediante el método de volumen finito (MVF) para el caso unidimensional. El sistema de ecuaciones resultante de la discretización con este método se resuelve implícitamente mediante el método de Newton Raphson. Se presenta un ejemplo de cálculo para cuando existe cambio de régimen y verificar así la robustez del modelo codificado. También se presenta la comparación numérico – experimental con datos obtenidos de ensayos realizados en el canal de laboratorio de la Sección de Ingeniería Hidráulica del Departamento de Hidráulica, Marítima y Ambiental de la Universidad Politécnica de Cataluña. Los resultados experimentales pueden consultarse en (Andreatta et al., 2000).

#### **ABSTRACT**

In this work we present a mathematical tool to evaluate the unsteady flow in open channels with a bed subject to erosion, taking into account the transport sediment phenomena only evaluating the bed load transport term. We use the finite volume method (FVM) for the unidimensional consideration. The equations result from the discrete form are solved implicitly using the Newton Raphson method. A numerical example is presented to show the robustness of the codified model by solving a floe regime transition. We present also a numeric-experimental comparison with data provided by a set of experimental data achieved in the laboratory flume of the Hydraulic, Maritime and environmental of the Politechnical University of Catalonia. The experimental data can be found in (Andreatta et al, 2000).

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando en el transporte de sedimentos de un cauce fluvial existe un déficit o un exceso de la aportación sólida, ya sean debidos a causas naturales o a actuaciones del hombre, se produce un desequilibrio que da lugar, respectivamente, a problemas de erosión o sedimentación en el lecho, manifestados por el descenso o el ascenso del fondo. Este trabajo tiene como principal objetivo la validación de un determinado modelo numérico para el estudio y la estimación de este tipo de fenómenos. Se ha creado para ello una herramienta informática que permite analizar la evolución temporal y los estados de equilibrio en problemas y situaciones con condiciones de régimen variable en lechos móviles bajo condiciones de flujo unidimensional y transporte de sedimentos exclusivamente por arrastre de fondo.

La aplicación inmediata de este modelo es el trabajo de laboratorio, pero su capacidad se puede extender a aplicaciones prácticas sencillas. El valor añadido de este código radica esencialmente en la robustez del código para admitir ondas abruptas del flujo como pueden ser los resaltos móviles y los frentes de onda. No existen en el mercado códigos sencillos completos como el presentado, una versión sencilla de la resolución de este fenómeno en cuasi permanente lo muestra el HEC-6.

Se presenta la forma de discretizar las ecuaciones, cuya principal idea es mantener la estructura de los flujos de masa y de cantidad de movimiento y considerarlas como variables fundamentales, por lo que respecta al calado y la velocidad del flujo, estas se convierten en variables que se deben calcular siempre que se requiera durante el proceso de cálculo. Al mantener la estructura original de las ecuaciones las discontinuidades propias de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico se pueden modelar sin mayor problema. En esto consisten muchos de los métodos de resolución como son Lax-Wendroff y derivados (Bateman, 1993). El método de McCormack es algo diferente pues utiliza una aproximación en un sentido y una corrección en sentido contrario, lo cual capacita al modelo de una corrección de las perturbaciones espúreas que otros métodos no consiguen eliminar.

El aporte fundamental consiste en la aplicación del modelo a un ensayo de laboratorio y la verificación de los resultados tanto en régimen permanente como no permanente. Las diferencias permitirán corregir el modelo matemático en un futuro.

## 2. ECUACIONES DEL MODELO

Las ecuaciones que se van a resolver corresponden a las de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento del agua y a la conservación de la masa del transporte sólido. Lo que implica un sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico que serán resueltas simultáneamente según se planteo de partida. Las ecuaciones son las típicas de flujo variable en canales (ecuaciones de Saint-Venant) y las de transporte sólido o ecuación de Exner. El planteamiento de estas ecuaciones está descrito en diferente bibliografía como puede ser (Abott & Minns, 1998), (Graf, W, 1998). La resolución de estas ecuaciones es fundamental para línea de investigación que se lleva a cabo en la sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica. El hecho de pretender resolver las ecuaciones mediante este método y en forma implícita es fundamental pues los otros métodos tenían problemas de convergencia, sobre todo en presencia de cambios de régimen. Por ello es de fundamental importancia los ejemplos que se describen en este artículo.

Las ecuaciones del régimen variable en un canal de fondo móvil, únicamente con transporte sólido de fondo, bajo condiciones unidimensionales son:

Ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento para el fluido (Ecuaciones de Saint-Venant):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = T \quad (1,2)$$

, donde 
$$\underline{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gAy \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(S_0 - S_f) \end{pmatrix}$$

Ecuación de conservación de la masa de sólidos (Ecuación de Exner):

$$(1 - \lambda) \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Ecuación de pérdidas por fricción (según Manning):

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (4)$$

Ecuación de caudal sólido por transporte de fondo (según Meyer-Peter y Müller):

$$\left(\frac{n_s}{n}\right)^{3/2} \bar{\tau} = \bar{\tau}_c + 0.25\phi^{2/3} \quad \text{con} \quad \bar{\tau}_c = 0.047 \quad (\text{MPM}) \quad (5)$$

$$\frac{\frac{q_s}{W}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)gD}} \frac{1}{\sqrt{g\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)D^{3/2}}} = 40 \cdot \left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)^3 \quad (\text{EB})$$

### 3. EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS (MVF)

El MVF es un esquema de discretización con resultados, en lo que al aspecto formal de las ecuaciones se refiere, muy similares a los de las Diferencias Finitas (MDF). Se trata, no obstante, de una metodología que presenta un proceso de discretización mucho más intuitivo y físico, probablemente más didáctico. En él se conservan perfectamente las ideas y conceptos que reproduce cada expresión, en lugar de emplear meras sustituciones matemáticas para las derivadas y realizar una serie de operaciones algebraicas en las que se pierde parcialmente el sentido físico de muchos términos, como sucede con los MDF.

El MVF se basa sencillamente en la integración espacial y temporal de las ecuaciones diferenciales en pequeños volúmenes de control en los que se divide o discretiza el dominio de un problema. Con la forma integral de estas ecuaciones pueden independizarse fácilmente los dominios espacial y temporal, y progresar en la integración con técnicas habituales de discretización (consideración de dominios suficientemente pequeños, ponderación de variables entre intervalos temporales, etc.) hasta alcanzar la forma definitiva de las ecuaciones que se han adoptado en el modelo numérico de este trabajo. Como sucede con el MDF, las distintas variables de un problema sólo se valoran en el conjunto de puntos (volúmenes e instantes) que constituyen el dominio discretizado, y por tanto para obtener resultados en el resto de puntos debe recurrirse a la interpolación.

En el caso de la ecuación (1) de conservación de la masa en el fluido, su forma integral, para cada volumen de control, puede obtenerse, integrando en los dominios de la figura 1, como :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_a^b \frac{\partial A}{\partial t} \cdot dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx dt = 0 \quad (6)$$

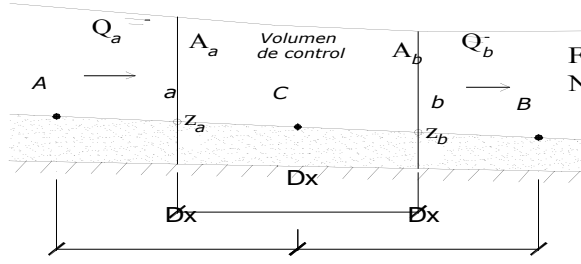


Fig. 1.  
Notación en un volumen de control

Ahora es posible integrar fácilmente el término de flujo ( $Q$ ) e invertir el orden de integración para el término de masa ( $A$ ). Basta seguir integrando en el tiempo ambos términos, pero teniendo la precaución de ponderar entre intervalos de tiempo el término de flujo, de forma que pueda obtenerse una expresión general que permita trabajar con un método explícito totalmente implícito ( $\theta=1$ ) o parcialmente implícito ( $0<\theta<1$ ). Finalmente, integrando el término de masa en un volumen de control de pequeña longitud se llega a la expresión definitiva de la ecuación discretizada de conservación de la masa en el fluido:

$$(A_c - A_c^0) \cdot \Delta x + \Delta t \cdot \left[ \theta \cdot (Q_b - Q_a) + (1 - \theta) \cdot (Q_b^0 - Q_a^0) \right] = 0 \quad (7)$$

De forma análoga pueden obtenerse las ecuaciones discretizadas de conservación de la cantidad de movimiento en el fluido (2) o de la masa en el sedimento (3), cuyas expresiones son respectivamente:

$$(Q_c - Q_c^0) \cdot \Delta x + \Delta t \cdot \left[ \theta \cdot (f_b - f_a) + (1 - \theta) \cdot (f_b^0 - f_a^0) \right] \cdot \Delta t \cdot \left[ \theta \cdot g \cdot A_c \cdot (z_b - z_a) + (1 - \theta) \cdot g \cdot A_c^0 \cdot (z_b^0 - z_a^0) \right] \\ + \Delta t \cdot \left[ \theta \cdot g \cdot A_c \cdot S_{f_c} \cdot \Delta x + (1 - \theta) \cdot g \cdot A_c^0 \cdot S_{f_c}^0 \cdot \Delta x \right] = 0 \quad (8)$$

$$(z_c - z_c^0) \cdot \Delta x + \frac{\Delta t}{1 - \lambda} \cdot \left[ \theta \cdot (q_{sb} - q_{sa}) + (1 - \theta) \cdot (q_{sb}^0 - q_{sa}^0) \right] = 0 \quad (9)$$

Dividiendo el dominio espacial de un problema en  $n$  volúmenes de control, en cada uno de ellos se dispone de 3 ecuaciones ((7), (8) y (9)) para 3 incógnitas ( $Q_c$ ,  $A_c$ ,  $z_c$ ) gracias a que la pendiente motriz ( $S_f$ ) y el caudal sólido ( $q_s$ ) en estos puntos vienen dados respectivamente por (4) y (5). Se trata por tanto de un problema "bien planteado", con  $3 \times n$  ecuaciones ( $f_1(Q, A, z)$ ,  $f_2(Q, A, z)$ , ...,  $f_{3n}(Q, A, z)$ ), que constituyen un sistema no lineal, y  $3 \times n$  incógnitas para cada instante de cálculo. Para su resolución numérica puede hacerse uso del Método de Newton-Raphson, o alguno de sus derivados, que se aproximan gradualmente a la solución mediante incrementos dados por el gradiente (jacobiano) de la(s) función(es) en el punto previamente conocido. Aprovecha para ello el desarrollo en series de Taylor hasta el segundo término

$$\left( 0 = \bar{f}(\bar{x}^{k+1}) = \bar{f}(\bar{x}^k + \Delta \bar{x}^{k+1}) \approx \bar{f}(\bar{x}^k) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}^k) \cdot \Delta \bar{x}^{k+1} \right).$$

El planteamiento matricial de este problema sería, para un solo punto de discretización, el mostrado en el sistema siguiente, que debe resolverse para cada instante de cálculo:

$$\begin{bmatrix} Q^{k+1} \\ A^{k+1} \\ z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^k \\ A^k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q} & \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Q} & \frac{\partial f_3}{\partial A} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial Q} & \frac{\partial A}{\partial A} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(Q^k, A^k, z^k) \\ f_2(Q^k, A^k, z^k) \\ f_3(Q^k, A^k, z^k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los valores en el instante inicial (notación “<sup>0</sup>”) corresponden a los valores ya conocidos, soluciones del instante anterior. En el caso de los volúmenes intermedios o interiores (todos excepto los dos de los extremos), las variables ( $Q, A, z, f, \bar{y}, q_s$ ) valoradas en los contornos de los volúmenes ( $a, b$ ) pueden interpolarse a partir de las auténticas incógnitas, las variables en los puntos medios de los volúmenes ( $A, B, C$ ). Se adopta así el valor medio de los flujos en lugar del flujo de valores medios, de forma que la interpolación conserva el sentido físico de éstas variables.

#### 4. APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Para los volúmenes de los extremos del dominio, en los contornos interiores puede trabajarse de la misma forma; interpolando las distintas variables. Los dos contornos restantes son los auténticos contornos del dominio, en los que es necesaria la imposición de las condiciones que han de gobernar y determinar cada estado en cada instante dado. Las condiciones de contorno empleadas han sido las utilizadas habitualmente en este tipo de problemas, cuya implantación en el modelo numérico se describe a continuación:

1.- Introducción del caudal líquido aguas arriba, tanto en régimen lento como rápido:

$Q_a = Q^*$  en el primer volumen de la discretización. En adelante el (\*) indica un valor conocido que puede depender del tiempo.

Aguas abajo basta aplicar la ecuación (7) en el último semivolumen  $\left( \Delta x' = \frac{\Delta x}{2} \right)$  del dominio si el régimen es lento:

$$Q_b = Q_c - \frac{1-\theta}{\theta} (Q_b^0 - Q_c^0) - \frac{\Delta x}{4\theta\Delta t} (A_c + A_b - A_c^0 - A_b^0) \quad (11)$$

Cuando el régimen es rápido, ante la falta de algún control hidráulico, en el modelo se presupone un valor para el área de flujo similar al del instante anterior ( $A_b \approx A_b^0$ ), y con la ecuación (11) se determina el caudal líquido asociado, de forma que con ambos valores sea posible calcular el caudal sólido mediante la expresión (5). Por otro lado, puesto que de la condición de contorno en cota y la ecuación (12), este caudal sólido es conocido, pueden compararse ambos valores y, mediante un proceso iterativo, ir corrigiendo el valor inicialmente supuesto del área ( $A_b$ ), hasta que ambos caudales sólidos coincidan. En ese momento se considera que el área y el caudal de líquido se corresponden con la condición de contorno impuesta sobre el sedimento y por tanto sus valores son los que se tenderían a producir realmente en el contorno. Otra alternativa, algo más compleja de programar pero probablemente más fiel al proceso físico (al conservar también la cantidad de movimiento), puede consistir en imponer las dos ecuaciones de Saint-Venant en el semivolumen del extremo y resolverlas iterativamente, lo que equivale a seguir todo el esquema general necesario en el resto de los volúmenes intermedios.

2.- Introducción del caudal sólido aguas arriba, tanto en régimen lento como rápido:

$q_{sa} = q_s^*$  en el primer volumen de la discretización.

Aguas abajo basta aplicar la ecuación (9) en el último semivolumen del dominio:

$$q_{sb} = q_{sc} - \frac{1-\theta}{\theta} (q_{sb}^0 - q_{sc}^0) - \frac{(1-\lambda)\Delta x}{4\theta\Delta t} (z_c + z_b - z_c^0 - z_b^0) \quad (12)$$

3.- Fijación de la cota del fondo aguas abajo, tanto en régimen lento como rápido:

$z_b = z^*$  en el último volumen de la discretización.

Aguas arriba basta aplicar la ecuación (9) en el primer semivolumen del dominio:

$$z_a = z_a^0 + z_c^0 - z_c - \frac{4\Delta t}{(1-\lambda)\Delta x} \left[ \theta(q_{sc} - q_{sa}) + (1-\theta)(q_{sc}^0 - q_{sa}^0) \right] \quad (13)$$

4.- Fijación del nivel de agua aguas abajo si el régimen es lento:

$y_b = y$  en el último volumen de la discretización.

Aguas arriba, cuando el régimen es lento, basta aplicar la ecuación (7) en el primer semivolumen del dominio:

$$A_a = A_a^0 + A_c^0 - A_c - \frac{4\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta (Q_c - Q_a) + (1-\theta)(Q_c^0 - Q_a^0) \right] \quad (14)$$

5.- Fijación del nivel de agua aguas arriba si el régimen es rápido:

$y_a = y$  en el primer volumen de la discretización.

El calado aguas abajo, cuando el régimen es rápido, se obtiene según lo visto en la condición de caudal líquido.

## 5. RESULTADOS DEL MODELO

Se presenta a continuación un ejemplo simulado con el modelo en el que se observa la formación de una única pendiente de equilibrio a partir de un tramo que inicialmente contaba con dos pendientes. Dado que el primer tramo del canal cuenta con una pendiente inicial rápida y el segundo tramo con una lenta, debería observarse como en los primeros instantes se forma un resalto hidráulico entre ambos regímenes. Con el paso del tiempo el transporte de sedimento intentará equilibrar el perfil del canal con las condiciones de contorno, para lo cual se producirá la erosión de la fuerte pendiente inicial de la zona de aguas arriba y se propagará hacia aguas abajo una onda de sedimento que irá depositándose debido a la pérdida de capacidad de transporte. La diferencia de pendiente entre tramos se irá atenuando, con lo que el resalto se irá desplazando hacia aguas abajo hasta desaparecer. Finalmente se alcanzará una única pendiente en todo el canal; la pendiente de equilibrio para las condiciones de contorno impuestas, asociada a un régimen uniforme, en este caso de tipo rápido.

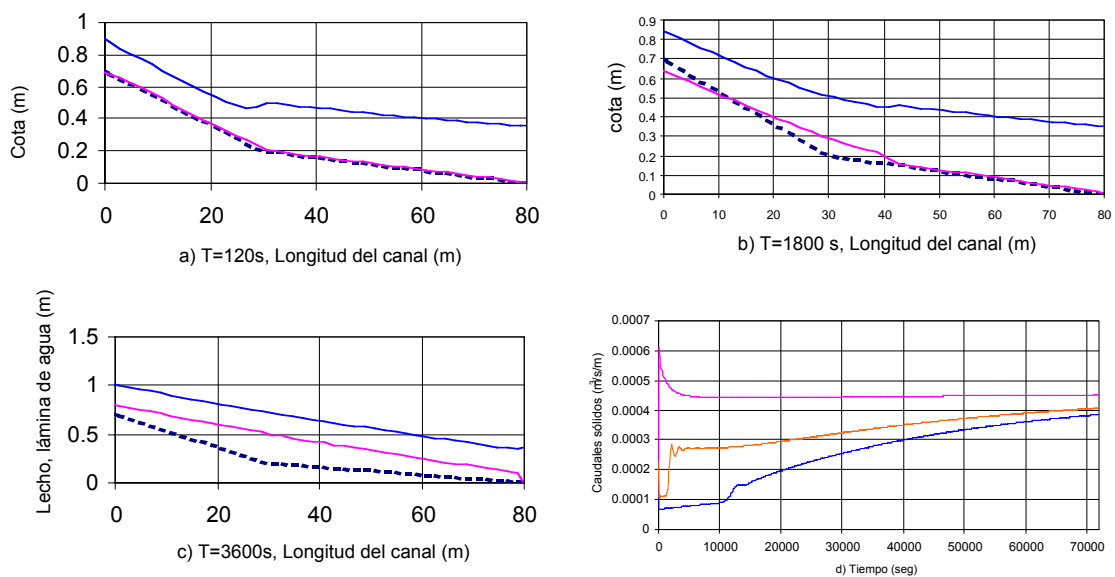
Este ejemplo ficticio se desarrolla en un canal de sección rectangular constante, de 1 m de ancho y 80 m de longitud. Se dispone en él una capa de sedimento de las siguientes características:  $D = 1$  mm,  $\lambda = 0.3$  y  $\gamma_s = 2650$  kp/m<sup>3</sup>, estimándose la rugosidad de la solera en  $n = 0.020$ . En los primeros 30 m se crea una pendiente del 1.67 % y en los 50 m restantes del 0.4 %, sobre un fondo horizontal no erosionable. Las condiciones de contorno, permanentes, son  $Q = 0.3$  m<sup>3</sup>/s,  $q_s = 0.00045283$  m<sup>3</sup>/s/m (1200 gr/s) e  $y = 0.2093$  m aguas arriba (calado crítico), y  $z = 0$  m e  $y = 0.35$  m aguas abajo. Se adoptan como parámetros de la discretización:  $\Delta x = 2$  m,  $\Delta t = 30$  s,  $\theta = 0.6$ , y se calcula el problema durante 20 horas (72000 s).

Se muestran a continuación en la figura 2 los perfiles del fondo y de la lámina de agua para los instantes 120, 1800 y 36000 seg, respectivamente.

El resalto se forma inicialmente en el cambio de régimen, que coincide aproximadamente con el cambio de pendiente. Con el paso del tiempo se desplaza hacia aguas abajo con el progreso de la onda de sedimento, a la vez que se va debilitando, hasta prácticamente desaparecer a la media hora (aproximadamente a partir de los 1800 s se vuelve extremadamente débil), dando lugar a un régimen rápido en todo el canal.

En la zona de aguas arriba, donde la fuerte pendiente del fondo da lugar a una elevada capacidad de transporte, se observa un déficit de sedimento que da lugar a un descenso del lecho por efecto de la erosión (que a las 20 h llega a alcanzar los 8 cm en el extremo de aguas arriba). Por el contrario, en la zona de aguas abajo, con un pendiente muy suave, el flujo se ralentiza y deposita el exceso de sedimento que no es capaz de transportar, dando lugar a la onda de sedimento que se ve progresar hacia abajo y que finalmente constituirá el propio fondo del cauce con la pendiente de equilibrio asociada a las condiciones impuestas. Este proceso de erosión-

sedimentación es muy rápido en los primeros instantes, pero a partir de la atenuación del resalto se ralentiza extremadamente.



**Figura 2.** Perfil del fondo y lámina para diferentes instantes, la línea discontinua representa el fondo al inicio del experimento numérico. La figura d muestra la evolución temporal del caudal sólido en tres secciones diferentes del canal.

A la hora de simulación (3600 s), se aprecia ya la llegada de la onda de sedimento al extremo de aguas abajo del canal y la definición de una pendiente única, aunque todavía no se ha estabilizado el proceso ya que se observa como el régimen no es uniforme (los calados aguas abajo todavía son claramente mayores).

De los resultados gráficos anteriores se concluye que el modelo reproduce fielmente los comportamientos previsibles indicados inicialmente. Aunque la pendiente a las 10 horas (36000 s) no está perfectamente equilibrada (ni siquiera a las 20 h), puede observarse claramente la tendencia asintótica a la estabilidad en la evolución temporal de los caudales sólidos en tres puntos del canal; dos próximos a los extremos y uno en el centro del canal, grafico d de la figura 2.

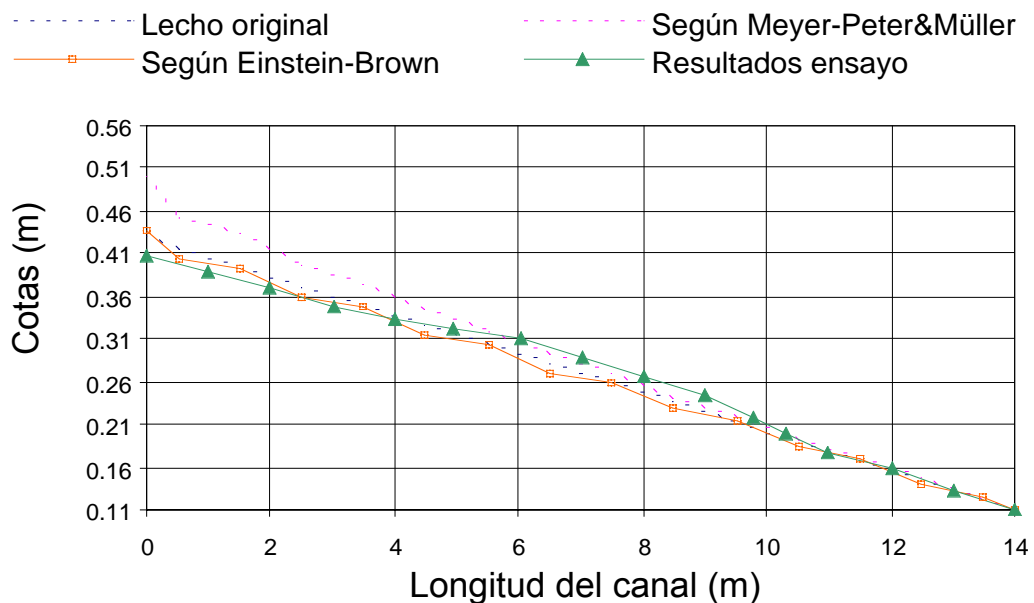
La estabilización del problema se alcanzaría para tiempos de cálculo mucho mayores, pero en este ejemplo se ha considerado más interesante el fenómeno de formación de una única pendiente de la solera y la capacidad del modelo para simular, desplazar y atenuar resaltos hidráulicos sobre un lecho móvil (fenómenos éstos que se producen a escalas de tiempo mucho menores que la estabilización).

## 6. COMPARACIÓN NUMÉRICO EXPERIMENTAL

Para la realización de esta comparación se han utilizado los resultados experimentales que se analizan en el trabajo presentado por (Andreatta et al., 2000). Estos ensayos se caracterizan por que son de larga duración y pueden pasar de un estado de equilibrio a otro en el tiempo, manteniendo un caudal líquido y sólido controlados. El material utilizado es arena de origen silíceo de tamaño casi uniforme con un diámetro  $D_{50}=0.857$  mm y un diámetro  $D_m=0.72$  mm y una desviación típica de  $\sigma=0.226$  mm. La densidad del material es de  $2570$  Kg/m<sup>3</sup> y una porosidad 0.40. El canal es rectangular y esta descrito en (Martín et al. 1998), (Andreatta et al., 2000). En este ensayo en régimen rápido se tomó la pendiente media de equilibrio de 2.27% para un ensayo de 10 l/s y 300 gr/s. Para las condiciones de contorno se tomó la pendiente media de equilibrio conseguida por el ensayo de laboratorio, para los caudales líquido y sólido se tomaron aquellos desequilibrios del ensayo experimental 12.2 l/s y 0.19 l/s/m. El coeficiente de Manning se estimó en 0.012 correspondiente a una valoración media de los diferentes ensayos experimentales realizados. Con estos datos es posible simular el fenómeno y compararlo con las mediciones experimentales. Aún y así se verá que aún teniendo en cuenta un flujo uniforme de partida y llegada, un canal rectangular, arena casi uniforme y flujo líquido y sólido controlados, la naturaleza

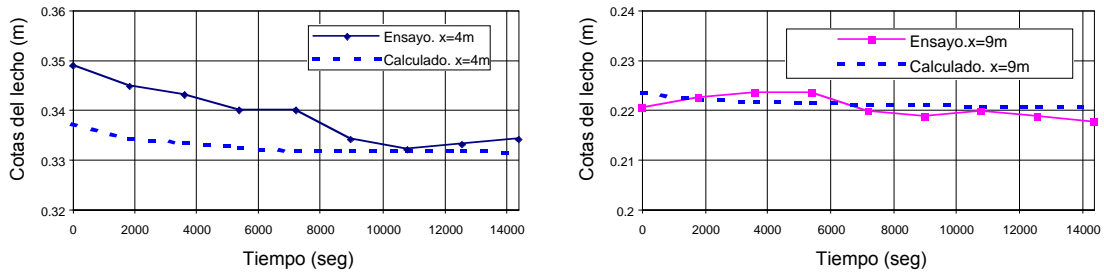
del fenómeno es más compleja y los resultados son sólo una aproximación, cosa que se pretendía.

El caudal sólido transportado es la gran piedra angular, destacamos que para los ensayos reproducidos se adecuó la fórmula de Meyer Peter Müller a las condiciones estrictas del canal ajustando los parámetros de la misma para varios ensayos en los que se llegó al régimen permanente y como muestra se ajustó el perfil de 17 m de longitud.. Esta fórmula se puede escribir en la forma simplificada en lecho sin formas de fondo como:  $\bar{\tau} = a_0 + A\phi^n$ , hemos creído conveniente mantener al parámetro  $a_0=0.047$  como es habitual, sin embargo A y n serán ajustados para nuestro caso particular. De esta forma  $A=0.331$  y  $n=0.226$ . Además se compara también los resultados con las formulas de Meyer Peter Müller y Einstein-Brown dada por la expresión:  $\bar{\tau} = 0.2924\phi^{1/3}$ .



**Figura 3.** Comparación numérico experimental de la evolución del lecho.

La figura 3 muestra la comparación entre la fórmula de Meyer-Peter & Müller y la de Einstein Brown con los valores medidos, para 14400 segundos. La forma real del fondo es diferente a los perfiles calculados puesto que la realidad tiene formas que no son reproducibles con el modelo (formas muy suaves que son inapreciables a simple vista). La formulación que más parece acercarse a la forma real es la de Einstein-Brown como ya se aprecia en (Andreatta et al, 2000), alejándose la formulación de Meyer-Peter&Müller. Es conveniente observar la evolución temporal de la altura de sedimentos en diferentes secciones del canal. Para ello en las gráficas de las figuras 4 y 5 se puede observar la evolución temporal de la sección 4m y la sección 9 m. En estas se puede apreciar que la evolución temporal de los puntos reales posee oscilaciones, en tanto que el calculado no. Por otro lado la tendencia final es la misma como debería de ocurrir. La sección más aguas abajo se parece más a la calculada (9 m) puesto que está más cerca de la condición de contorno final y las oscilaciones y variaciones son menores (punto duro o traviesa). La evolución temporal de los perfiles reales indica la presencia de formas de fondo que pueden ser ondas de gran longitud que apenas son apreciadas por el ojo humano. Para observar estas formas de fondo y perfiles de equilibrio en las condiciones de lecho plano teórico hace falta medir continuamente y representar las desviaciones del perfil de un perfil medio.



**Figura 4 y 5.** Comparación numérico experimental de la evolución temporal del lecho utilizando como ecuación de transporte la de Einstein-Brown en las secciones  $x=4m$  y  $x=9m$ .

## 7. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el desarrollo numérico de las ecuaciones en régimen no permanente de agua y sedimentos para cauces prismáticos con miras a su utilización en cauces experimentales y en el futuro a cauces reales. El método de cálculo utilizado denominado "Volumen Finito" se ha trabajado para tener una mejor comprensión de las ecuaciones físicas y no un mero tratamiento matemático. Se utiliza el concepto de flujo de masa y cantidad de movimiento como unas de las principales variables del problema matemático, se trato de no destruir estas magnitudes en ningún momento de la deducción matemática y discretización numérica. Esto conlleva una carga de trabajo adicional pues términos como el calado o profundidad de agua quedan implícitos en muchas de las ecuaciones y tienen que ser despejadas por métodos numéricos de cálculo en cada punto e instante de tiempo.

El comportamiento general de las soluciones halladas por el código de ordenador ha sido bueno y satisfactorio aún y cuando sólo se tuvo en cuenta el transporte de fondo y no el total. Los resultados de comparación numérico-experimental han sido bastante satisfactorios en cuanto a la forma general y la evolución temporal. El equilibrio del fenómeno matemático del transporte de sedimento tiene un comportamiento asintótico exponencial tal y como se puede demostrar matemáticamente (Graf W, 1998) y numéricamente (observando los resultados) en cambio el fenómeno real tiende a comportarse como una función logarítmica en el tiempo, como se demuestra en el trabajo (Andreatta et al, 2000). En consecuencia creemos que las relaciones de transporte no son las más adecuadas para la representación de la evolución temporal ni espacial del fenómeno pero sí una buena aproximación para otros cálculos ingenieriles. No hemos realizado comparaciones de sedimentación o llenado del canal pues hasta la fecha los resultados se están procesando pero se puede advertir tal y como aparece en (Suryanarayana, 1969) que la sedimentación es un proceso de menor velocidad. La velocidad de estabilización del ensayo aquí tratado resultó ser de aproximadamente 4 horas y la realidad es bastante similar, teniendo en cuenta el criterio de convergencia del equilibrio que se utilizaba en las fechas del ensayo (Andreatta, et al, 2000).

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Abbott, M.; Minns, A. (1998) *Computational Hydraulics*. Ashgate Publishing Company.
- [2]. Andreatta, A.; Bateman, A; Martín Vide, J.P.; Perez, M. (2000). Estudio experimental en lecho vivo del efecto de un sistema de traviesas en la estabilización de un cauce de gran pendiente. XIX Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Cordoba Argentina. (en revisión)
- [3]. Bateman A. (1993) Formación y Propagación de frentes de onda en canales. Un estudio Numérico experimental. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- [4]. Graf, H. W. (1998). *Fluvial Hydraulics*. John Wiley & Sons.
- [5]. Martín Vide J.P. & Bateman, A. (1999). *Experiments on sep stream stabilizations*. ASCE's, Int. Water Resource Eng. Conference, Seattle. USA.
- [6]. Suryanarayana, B. (1969). *Mechanics of degradation and aggradation in a laboratory flume*. Colorado State. PhD Thesis. Colorado USA:
- [7]. Versteeg, H; Malalasekera, W (1995). *An introduction to Computational Fluid Dynamics*. Longman Group Ltd.

## 9. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con la ayuda del proyecto HID096-0971 de la CICYT, así como de la Subdirección de investigación de la ETSECCiPB-UPC

## 10. NOTACIÓN

$\underline{U}$	vector de las variables hidráulicas del problema ( $A, Q$ )
$t$	tiempo
$\underline{f}$	vector de los flujos de las variables hidráulicas ( $Q, f$ )
$x$	distancia horizontal a lo largo del canal
$\underline{T}$	vector de términos independientes
$A$	área de flujo para el fluido
$Q$	caudal líquido
$f$	$= \frac{Q^2}{A} + gAy$ , flujo de cantidad de movimiento
$\underline{g}$	aceleración gravitatoria, de valor $9.807 \text{ m/s}^2$
$y$	profundidad del centro de gravedad del área de fluido desde de la superficie libre
$S_0$	pendiente geométrica de la solera
$S_f$	pendiente de la línea de energía
$\lambda$	porosidad del sedimento
$z$	cota de la solera
$q_s$	caudal unitario (por unidad de ancho del cauce) de sedimentos, debido únicamente a transporte de fondo
$v$	$= \frac{Q}{A}$ , velocidad media del fluido
$n$	coeficiente de fricción de los contornos del canal (según Manning)
$R_h$	radio hidráulico de la sección de fluido
$\bar{\tau}$	$= \frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)D}$ , tensión de corte adimensional sobre el fondo del canal
$n_s$	coeficiente de rugosidad de grano, de las partículas de sedimento
$\tau$	$= \gamma R_h S_f$ , tensión de corte sobre el fondo del canal
$\gamma_s$	peso específico de las partículas de sedimento
$\gamma$	peso específico del fluido
$D$	diámetro medio de las partículas de sedimento
$\bar{\tau}_c$	tensión de corte crítica adimensional sobre el fondo del canal
$\phi$	$= \frac{q_s}{\sqrt{g \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} D^3}}$ , parámetro de transporte de caudal sólido adimensional
$\Delta x$	incremento de longitud en el esquema numérico
$\Delta t$	incremento de tiempo en el esquema numérico
$\theta$	factor de ponderación entre estados temporales en el esquema numérico
Subíndices:	
$a, b$	contornos del volumen de control entorno del punto de discretización $C$
$A, B, C$	puntos de discretización
Superíndices:	
$0$	instante inicial o anterior para el instante $k$ de cálculo
$k$	instante de cálculo